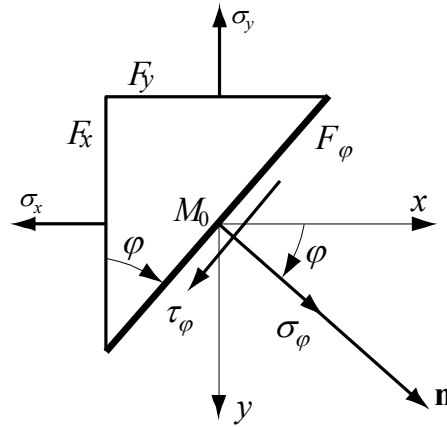


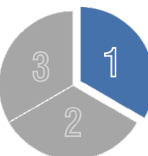
Mécanique des structures



Chapitre 3: État de contrainte bidimensionnel

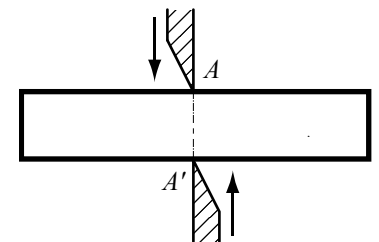
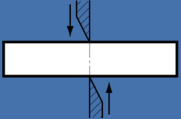
Pr. Shea & Dr Prenleloup
SGM BA3 2025-2026

EPFL

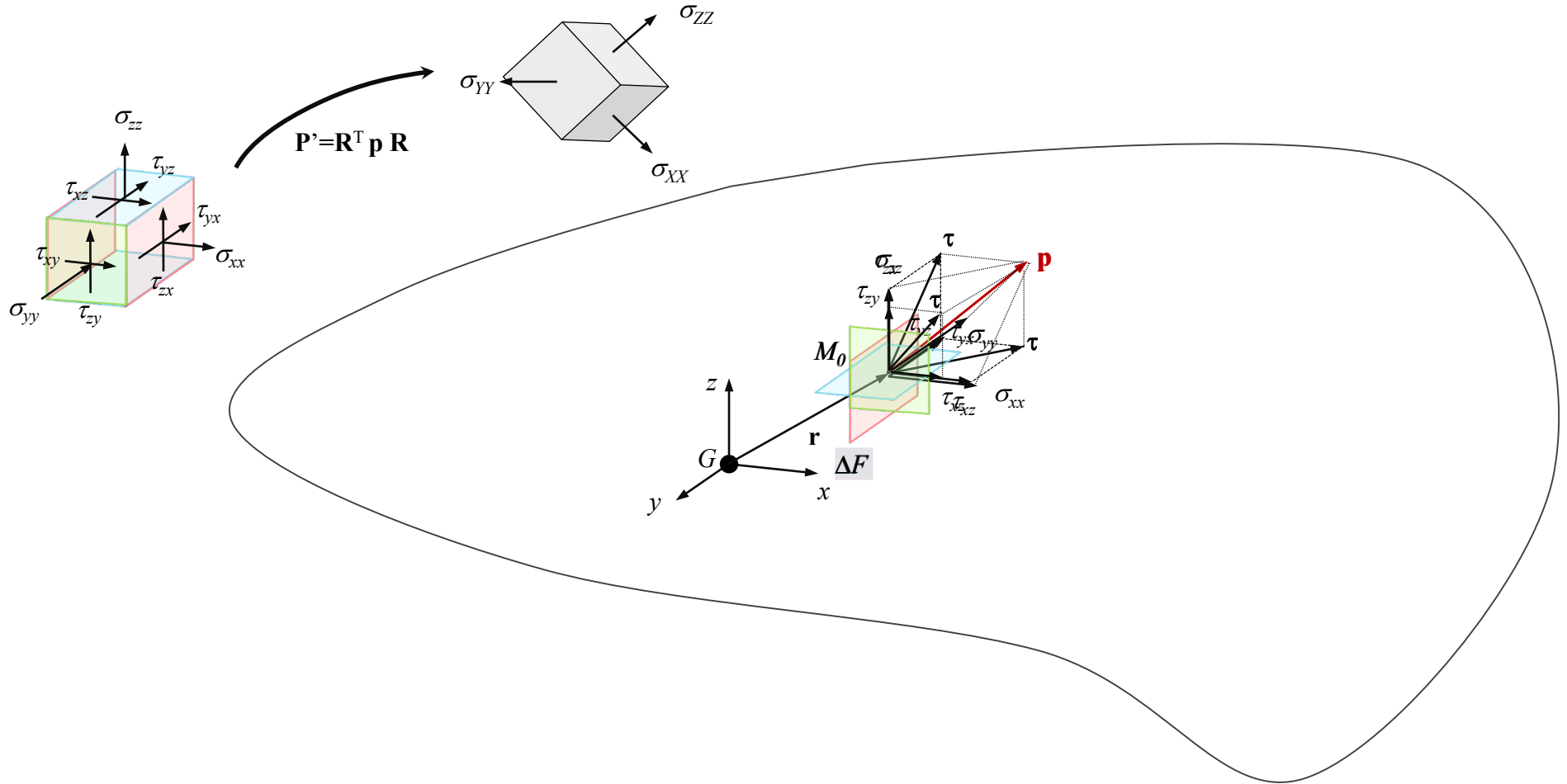


Chapitre 4 : Cisaillement simple

Rappel

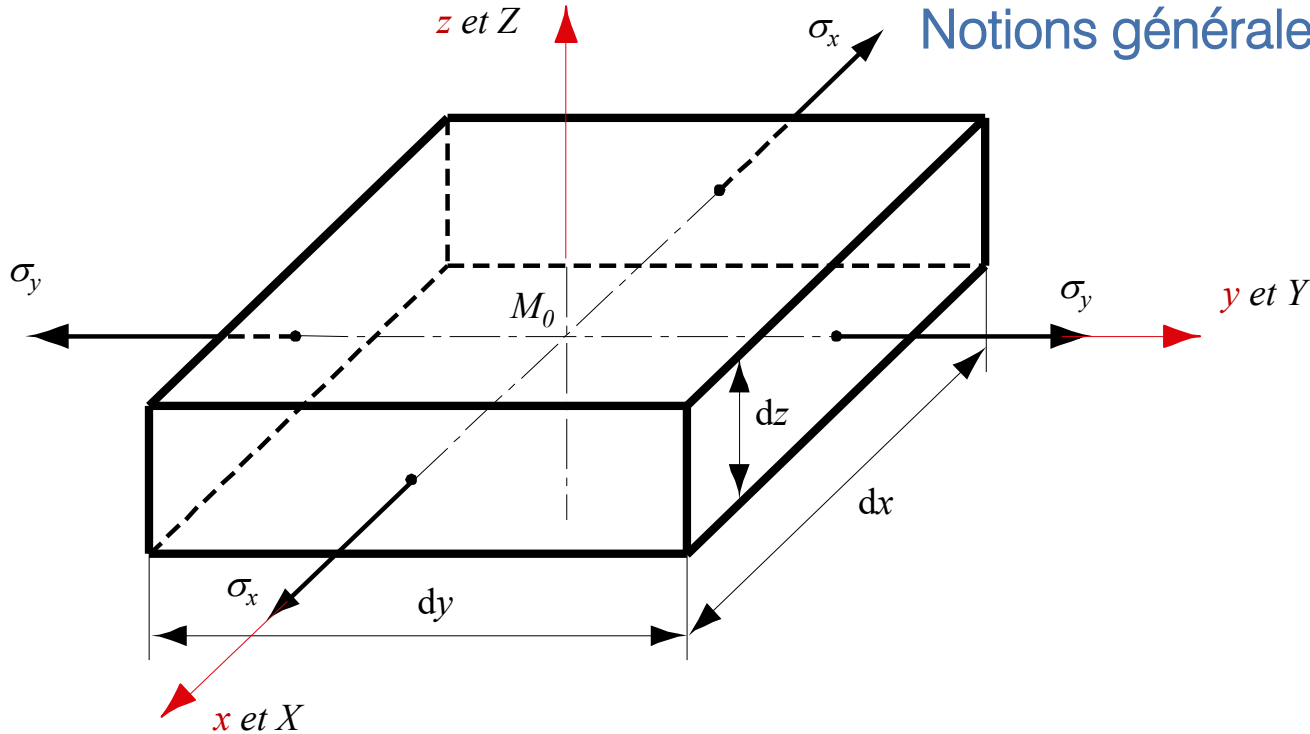


Chapitre 2 : Traction ou compression simple



$$\mathbf{R} = \iint_F \mathbf{p} \, dF$$

$$\mathbf{M} = \iint_F (\mathbf{r} \wedge \mathbf{p}) \, dF$$



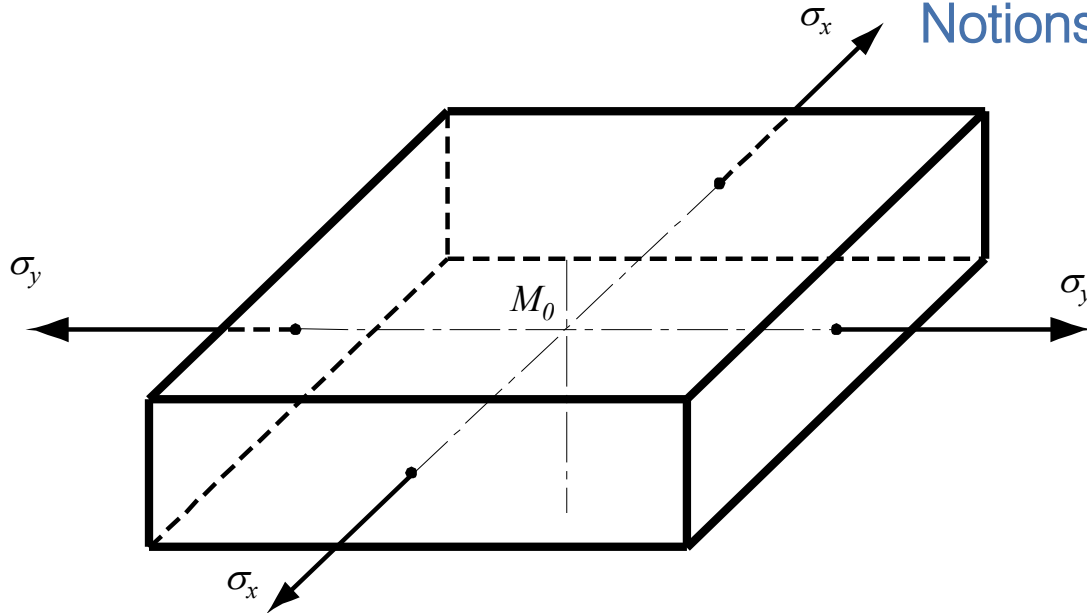
- $\sigma_1 = \sigma_x$
- $\sigma_2 = \sigma_y < \sigma_x$
- $\sigma_3 = \sigma_z = 0 < \sigma_y$

Quand l'une des trois contraintes principales est nulle, l'état de contrainte est dit **bidimensionnel**, tel qu'il apparaît par exemple dans des enceintes sous pression ou dans des membranes de capteurs.

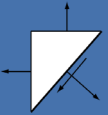
Dans ce qui suit, nous ne nous écarterons pas de la loi de proportionnalité et du *principe de superposition*. *Chaque contrainte entraîne les mêmes déformations que si elle était appliquée seule et la déformation résultante est la somme des déformations partielles.*

Chapitre 3 : État de contrainte bidimensionnel

Notions générales : Principe de superposition



	Allongement selon M_{0x}	Allongement selon M_{0y}	Allongement selon M_{0z}
Effet de σ_x	$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_x}{E}$	$\varepsilon_{yx} = -\mu \frac{\sigma_x}{E}$	$\varepsilon_{zx} = -\mu \frac{\sigma_x}{E}$
Effet de σ_y	$\varepsilon_{xy} = -\mu \frac{\sigma_y}{E}$	$\varepsilon_{yy} = \frac{\sigma_y}{E}$	$\varepsilon_{zy} = -\mu \frac{\sigma_y}{E}$
Somme	$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu\sigma_y)$	$\varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \mu\sigma_x)$	$\varepsilon_z = \frac{-\mu}{E} (\sigma_x + \sigma_y)$



Chapitre 3 : État de contrainte bidimensionnel

Principe de superposition

Ces résultats peuvent aisément être généralisés à un état de contrainte tridimensionnel ($\sigma_x \sigma_y \sigma_z$) avec les allongements relatifs :

- $\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \mu \frac{\sigma_y}{E} - \mu \frac{\sigma_z}{E}$
- $\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \mu \frac{\sigma_z}{E} - \mu \frac{\sigma_x}{E}$
- $\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \mu \frac{\sigma_x}{E} - \mu \frac{\sigma_y}{E}$

	Allongement selon M_{0x}	Allongement selon M_{0y}	Allongement selon M_{0z}
Effet de σ_x	$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_x}{E}$	$\varepsilon_{yx} = -\mu \frac{\sigma_x}{E}$	$\varepsilon_{zx} = -\mu \frac{\sigma_x}{E}$
Effet de σ_y	$\varepsilon_{xy} = -\mu \frac{\sigma_y}{E}$	$\varepsilon_{yy} = \frac{\sigma_y}{E}$	$\varepsilon_{zy} = -\mu \frac{\sigma_y}{E}$
Effet de σ_z	$\varepsilon_{xz} = -\mu \frac{\sigma_z}{E}$	$\varepsilon_{yz} = -\mu \frac{\sigma_z}{E}$	$\varepsilon_{zz} = \frac{\sigma_z}{E}$
Somme	$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu\sigma_y - \mu\sigma_z)$	$\varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \mu\sigma_x - \mu\sigma_z)$	$\varepsilon_z = \frac{1}{E} (\sigma_z - \mu\sigma_x - \mu\sigma_y)$

Ces résultats peuvent aisément être généralisés à un état de contrainte tridimensionnel ($\sigma_x \sigma_y \sigma_z$) avec les allongements relatifs :

- $\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_x}{E} - \mu \frac{\sigma_y}{E} - \mu \frac{\sigma_z}{E}$
- $\varepsilon_{yy} = \frac{\sigma_y}{E} - \mu \frac{\sigma_z}{E} - \mu \frac{\sigma_x}{E}$
- $\varepsilon_{zz} = \frac{\sigma_z}{E} - \mu \frac{\sigma_x}{E} - \mu \frac{\sigma_y}{E}$



$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\mu}{E} & -\frac{\mu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{1}{E} & -\frac{\mu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1}{G} & 0 \\ & & & & & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{pmatrix}$$

(sym)

matrice de compliance

Chapitre 3 : État de contrainte bidimensionnel

Forme matricielle (mécanique des solides)

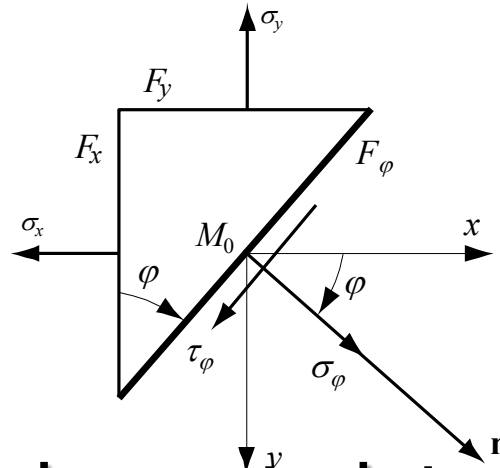
L'état de contrainte à un point n'est pas un scalaire ou un vecteur. C'est un objet mathématique plus compliqué et appelé **tenseur** (une norme et 2 directions)

Matrice de rigidité (voir chapitre 13)

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{pmatrix} = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} \begin{bmatrix} 1-\mu & \mu & \mu & 0 & 0 & 0 \\ & 1-\mu & \mu & 0 & 0 & 0 \\ & & 1-\mu & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1-2\mu}{2} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1-2\mu}{2} & 0 \\ & & & & & \frac{1-2\mu}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{pmatrix}$$

(sym)

Mécanique des structures



Chapitre 3: État de contrainte bidimensionnel

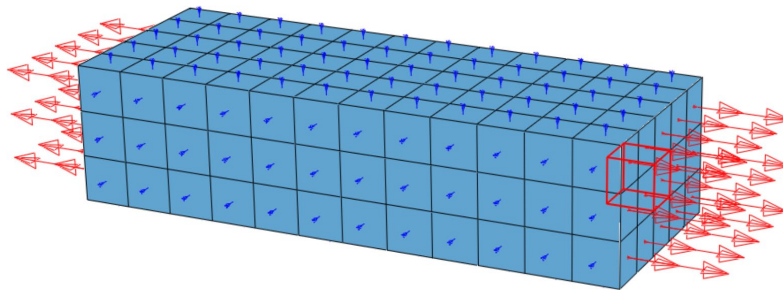
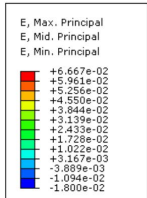
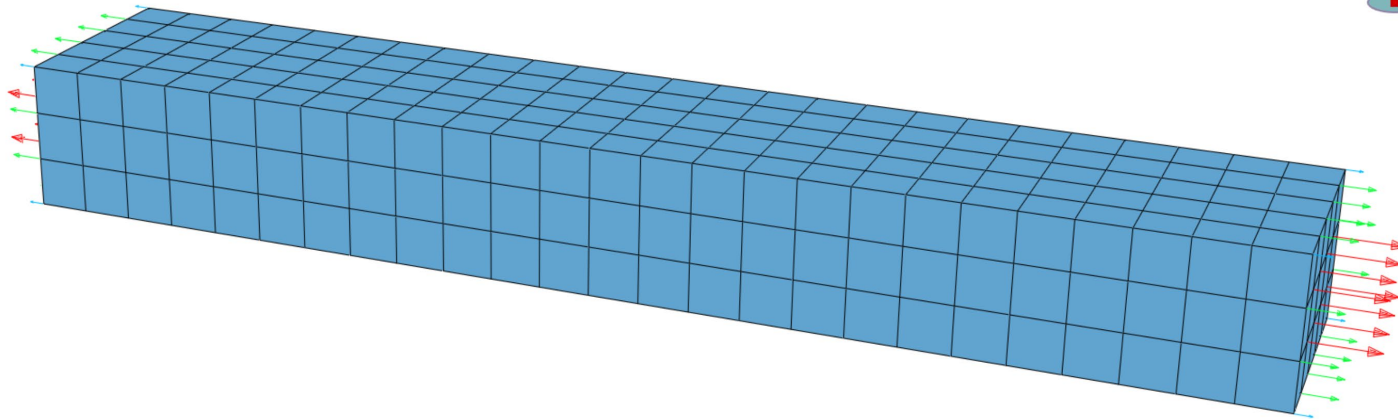
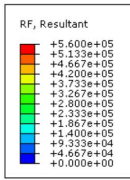
Pr. Shea & Dr Preneloup
SGM BA3 2025-2026

EPFL

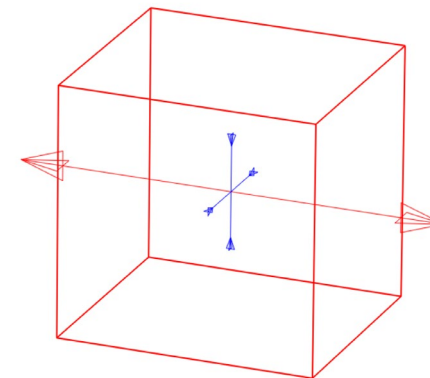


Chapitre 3 : État de contrainte bidimensionnel

Introduction

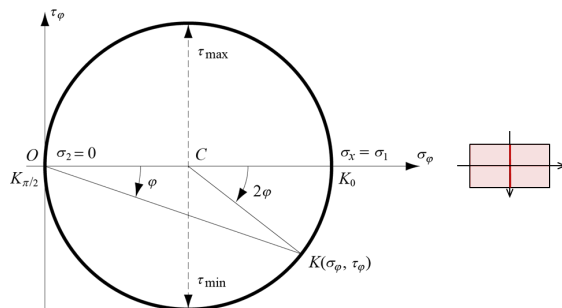


$$\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = -\mu \frac{\sigma_x}{E}$$



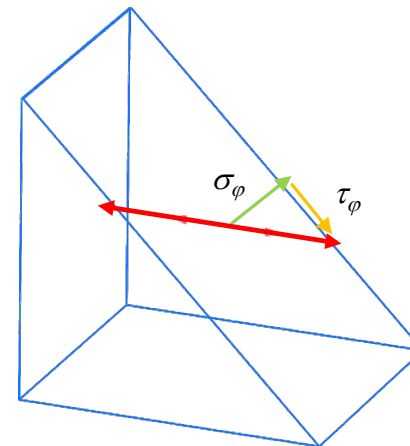
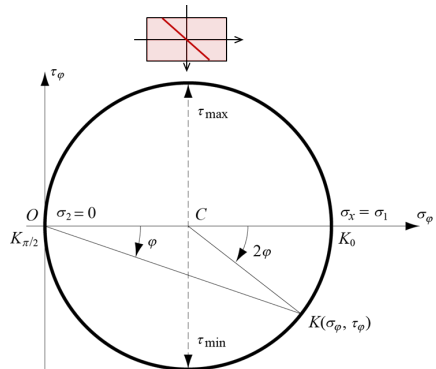
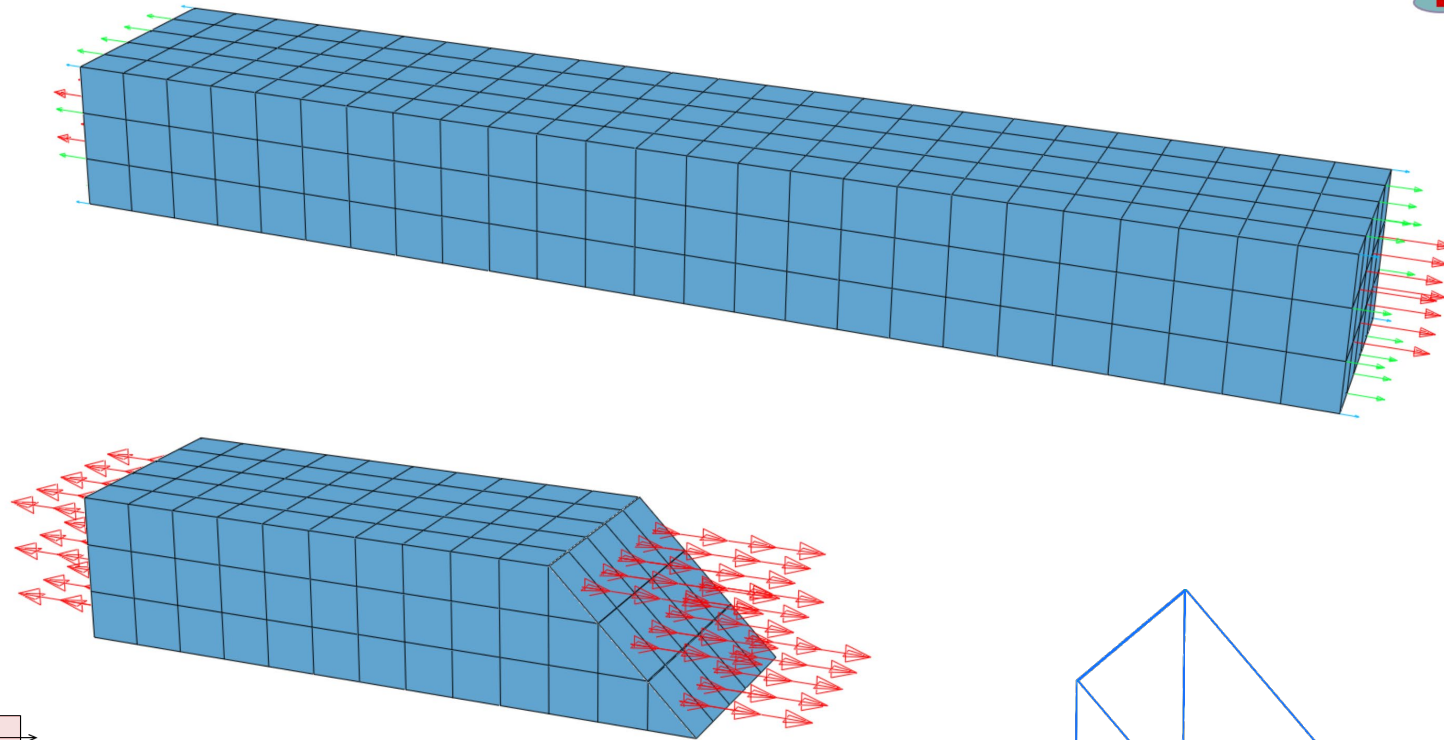
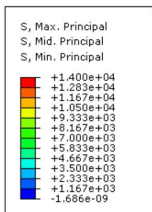
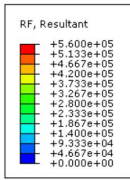
$$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_x}{E}$$

$$\sigma_z = \sigma_y = 0$$



Chapitre 3 : État de contrainte bidimensionnel

Introduction

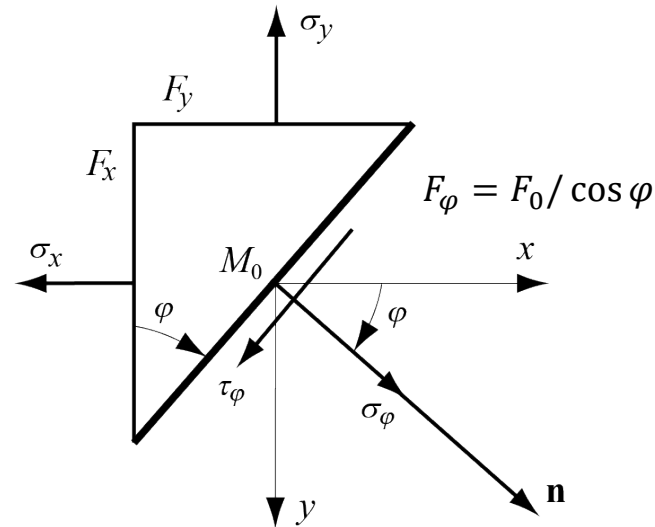


Chapitre 3 : État de contrainte bidimensionnel

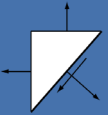
Analyse de l'état de contrainte bidimensionnelle

Les conditions de symétrie permettent souvent de connaître a priori les trois axes principaux en un point M_0 du solide, qui sont alors choisis comme axes de référence.

Calculons les contraintes normale σ_φ et tangentielle τ_φ dans une section oblique F_φ tournant autour de l'axe M_0z ($\sigma_z = 0$) et dont la normale \mathbf{n} fait un angle φ avec l'axe principal M_0x



- $F_\varphi \sigma_\varphi - F_x \sigma_x \cos \varphi - F_y \sigma_y \sin \varphi = 0$
- $F_\varphi \tau_\varphi + F_x \sigma_x \sin \varphi - F_y \sigma_y \cos \varphi = 0$



Chapitre 3 : État de contrainte bidimensionnel

État de contrainte bidimensionnelle pour axes de référence coïncidant avec les axes principaux

En vertu de la définition des faces $F_x = F_\varphi \cos \varphi$ et $F_y = F_\varphi \sin \varphi$, les relations précédentes deviennent, après simplification par F_φ

- $\sigma_\varphi = \sigma_x \cos^2 \varphi + \sigma_y \sin^2 \varphi = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\varphi$
- $\tau_\varphi = -(\sigma_x - \sigma_y) \cos \varphi \sin \varphi = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\varphi$

$$\cos^2 \varphi = \frac{1 + \cos 2\varphi}{2}$$

$$\sin^2 \varphi = \frac{1 - \cos 2\varphi}{2}$$

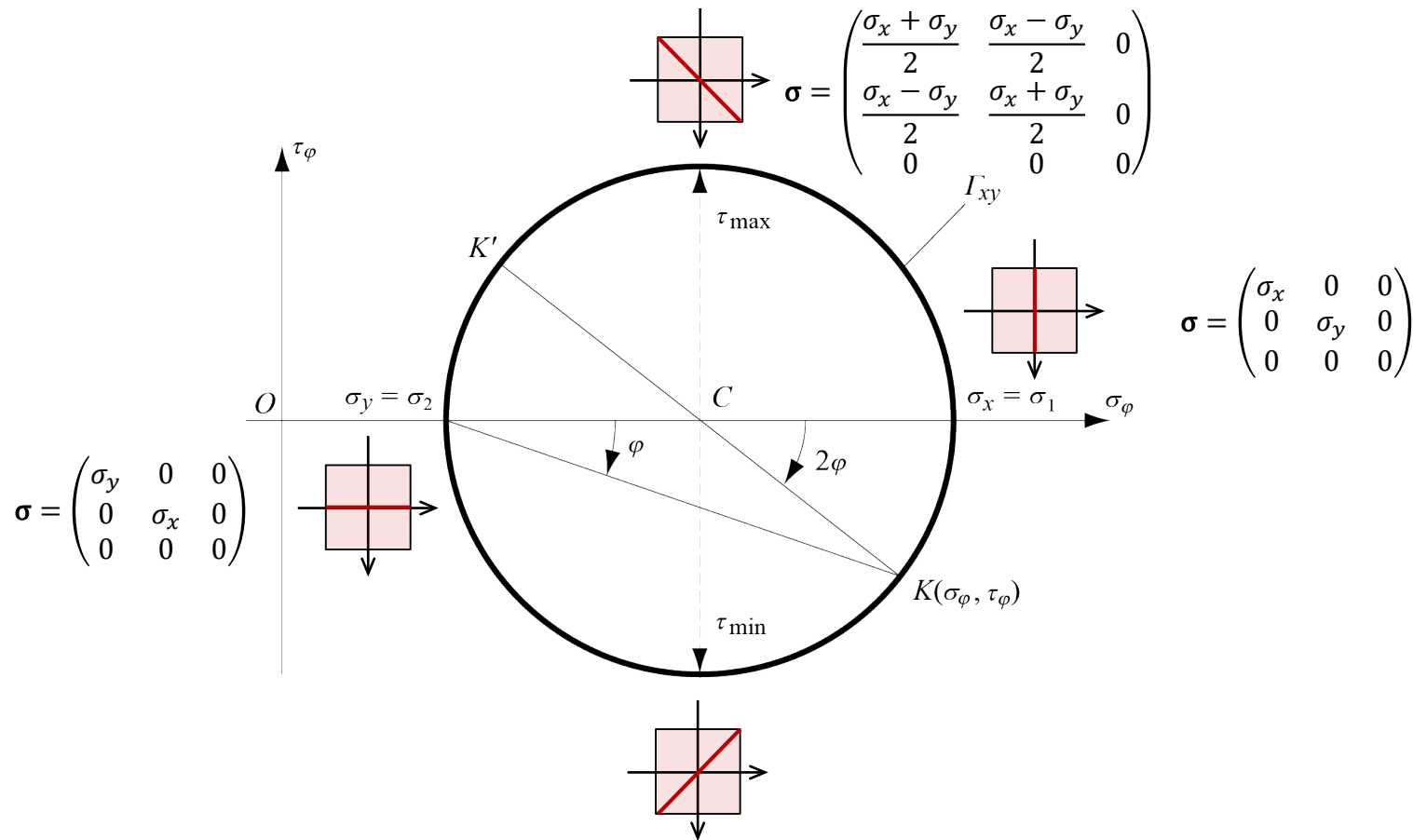
$$\cos \varphi \sin \varphi = \frac{\sin 2\varphi}{2}$$

On retrouve les équations paramétriques d'un cercle compris entre les contraintes principales $\sigma_1 = \sigma_x$ et $\sigma_2 = \sigma_y$ agissant sur les plans principaux entre lesquels la section tourne. Les contraintes de cisaillement τ_{max} et τ_{min} apparaissent à nouveau sur des sections dont les normales font respectivement les angles $-\pi/4$ et $+\pi/4$ avec l'axe principal M_0x .

Il s'agit du **cercle de Mohr** Γ_{xy} pour une section oblique tournant autour de M_0z

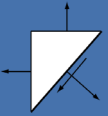
Chapitre 3 : État de contrainte bidimensionnel

État de contrainte bidimensionnelle pour axes de référence coïncidant avec les axes principaux



Cercle de Mohr Γ_{xy} pour une section oblique tournant autour de $M_0 z$

- $\sigma_\varphi = \sigma_x \cos^2 \varphi + \sigma_y \sin^2 \varphi = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\varphi$
- $\tau_\varphi = -(\sigma_x - \sigma_y) \cos \varphi \sin \varphi = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\varphi$

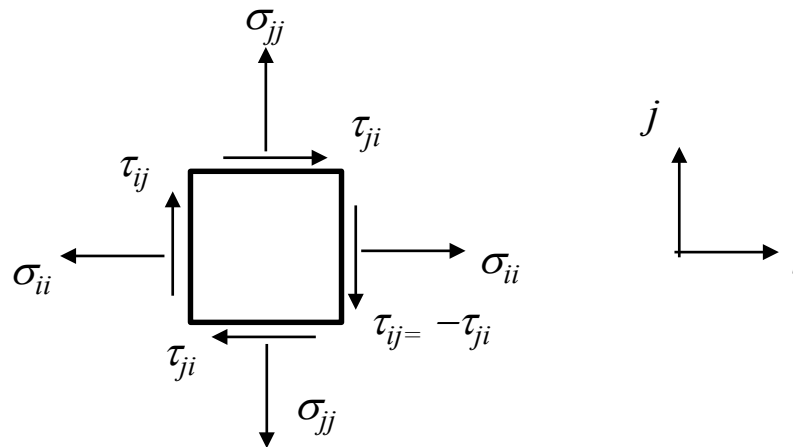


Chapitre 3 : État de contrainte bidimensionnel

État de contrainte bidimensionnelle pour axes de référence coïncidant avec les axes principaux

Dénomination des contraintes

- σ_{ii} contrainte normale
- τ_{ij} contrainte tangentielle (i direction application charge, j normale au plan)



Back

Chapitre 3 : État de contrainte bidimensionnel

État de contrainte pour axes de référence **différents** des axes principaux

Contraintes dans une section oblique lorsque σ_x et σ_y ne sont pas principales.

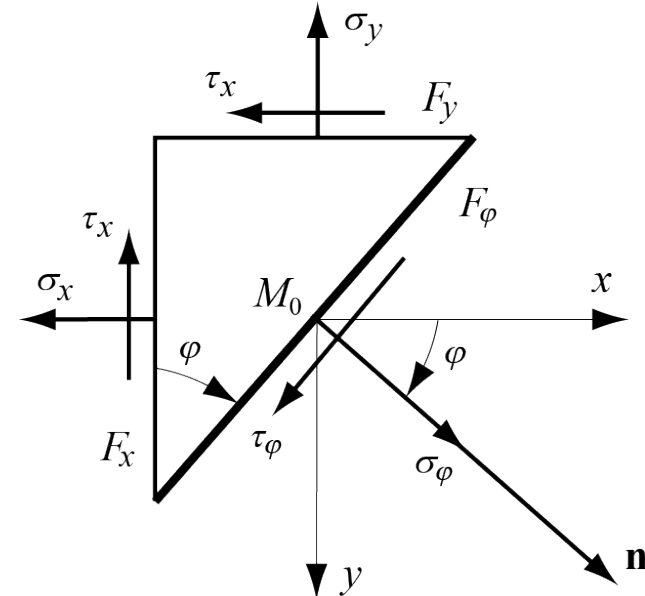
- $\sigma_\varphi = \sigma_x \cos^2 \varphi + \sigma_y \sin^2 \varphi + 2\tau_x \sin \varphi \cos \varphi$
- $\tau_\varphi = -(\sigma_x - \sigma_y) \sin \varphi \cos \varphi + \tau_x (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)$

L'insertion de l'angle 2φ permet d'expliciter ces relations sous la forme

- $\sigma_\varphi = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\varphi + \tau_x \sin 2\varphi$
- $\tau_\varphi = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\varphi + \tau_x \cos 2\varphi$

Qui peut aussi s'écrire

- $\sigma_\varphi = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + R \cos 2(\varphi - \varphi_0)$
- $\tau_\varphi = -R \sin 2(\varphi - \varphi_0)$
- $R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_x^2}$
- $\tan 2\varphi_0 = \frac{2\tau_x}{\sigma_x - \sigma_y}$



Chapitre 3 : État de contrainte bidimensionnel

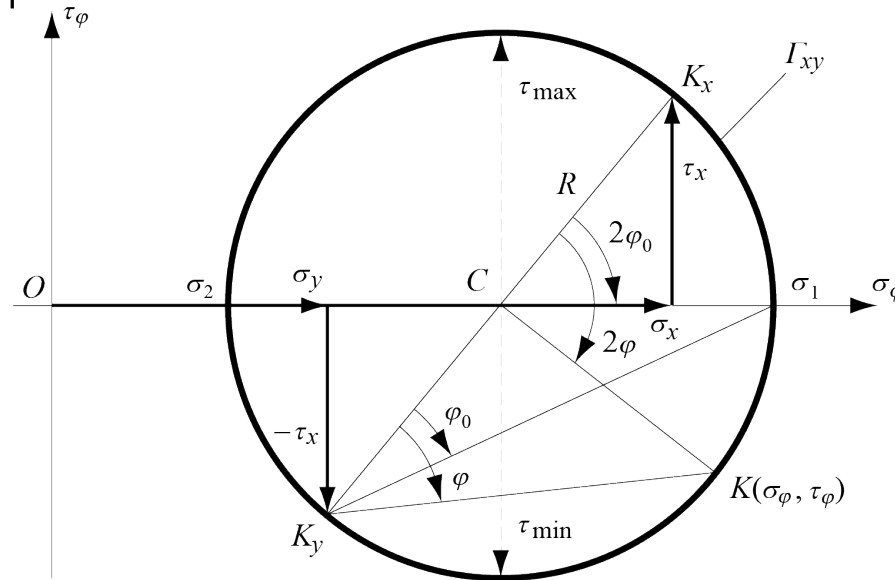
État de contrainte pour axes de référence **différents** des axes principaux

On retrouve l'équation du cercle fondamental de l'état de contrainte bidimensionnel. Il est cette fois compris entre les contraintes principales

- $\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + R$ avec $R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_x^2}$
- $\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - R$

Le fait que la contrainte normale est extremum quand la contrainte tangentielle est nulle est vérifié par les équations précédentes. En effet, la dérivation de la première équation par rapport à l'angle 2φ permet d'écrire

- $\frac{d\sigma_\varphi}{d(2\varphi)} = \tau_\varphi$



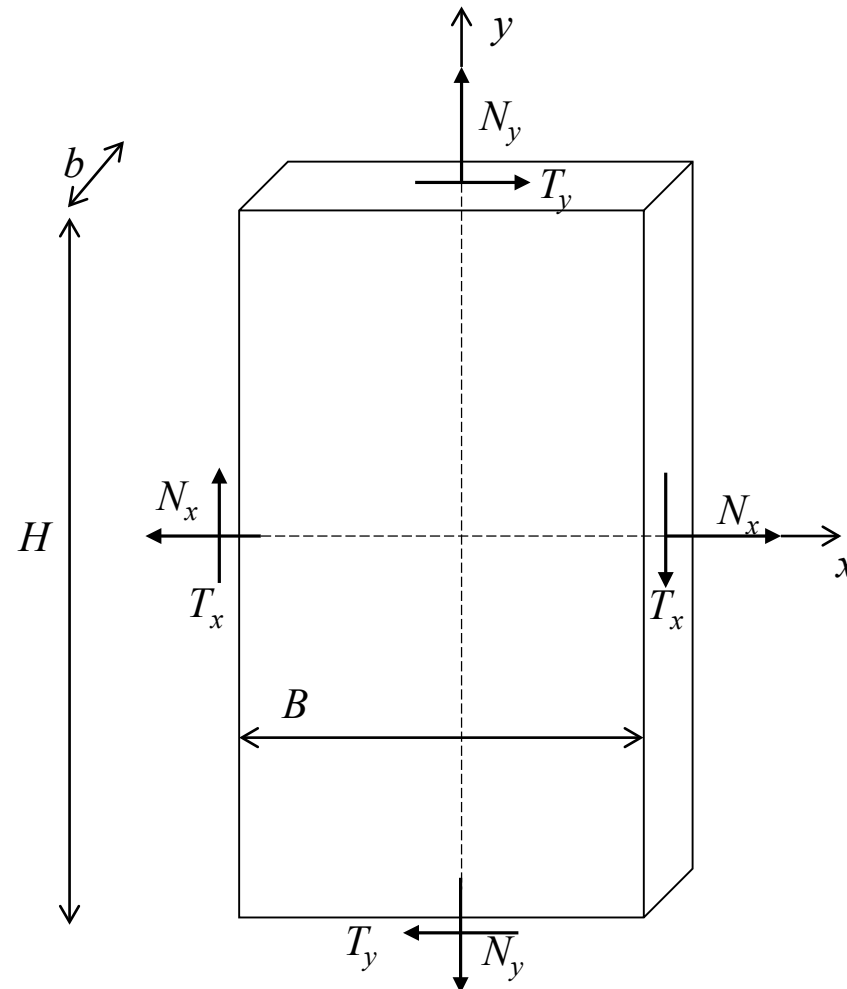
Chapitre 3 : État de contrainte bidimensionnel

Exemple bloc soumis à des charges biaxiales

La figure montre un bloc solide soumis à un état de contraintes pour lequel on connaît les composantes normales et tangentiels. Déterminer, par le calcul et sur le cercle de Mohr, les valeurs des contraintes principales.

- $N_x = 2 \times 10^5 \text{ N}$
- $N_y = -3.6 \times 10^4 \text{ N}$
- $T_x = 9 \times 10^4 \text{ N}$

- $B = 6 \text{ cm}$
- $b = 1 \text{ cm}$
- $H = 10 \text{ cm}$



Exemple plaque carrée

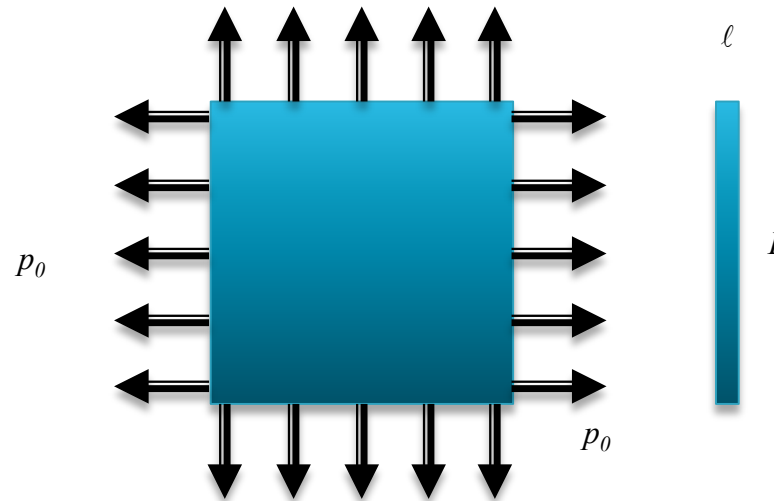
Une plaque carrée, en acier laminé à chaud, de 50 cm de côté et 2 mm d'épaisseur, subi sur son contour une charge linéique de $p_0 = 2 \times 10^5$ N/m.

$$L = 50 \text{ cm}$$

$$\ell = 2 \text{ mm}$$

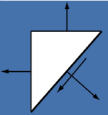
$$E = 201 \text{ GPa}$$

$$\mu = 0.27$$



Calculer :

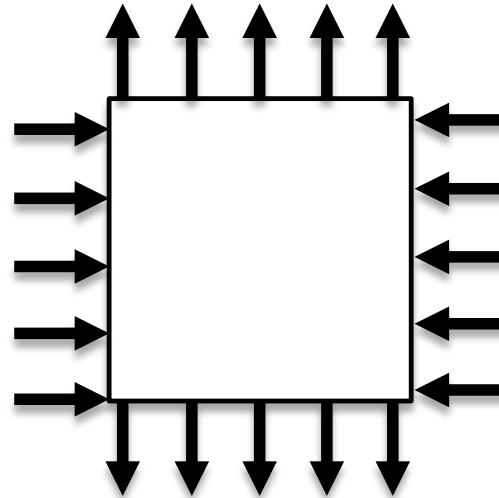
- 1) Les contraintes σ_x et σ_y au centre de la plaques et la contrainte de cisaillement sur le plan à 45°
- 2) Les allongements relatif ε et absolu ΔL des côtés
- 3) La variation relative de volume
- 4) La densité d'énergie



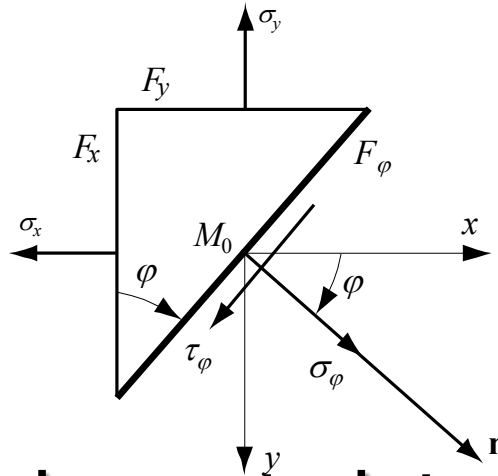
Chapitre 3 : État de contrainte bidimensionnel

Exemple plaque carrée en traction - compression

Illustrer la réciprocity d'un état de contrainte en traction – compression (équivalentes) avec un état de contrainte en cisaillement pur (dessiner le cercle de Mohr)



Mécanique des structures



Chapitre 3: État de contrainte bidimensionnel

Pr. Shea & Dr Prenleloup
SGM BA3 2025-2026

EPFL

erratum



Exemple plaque carrée

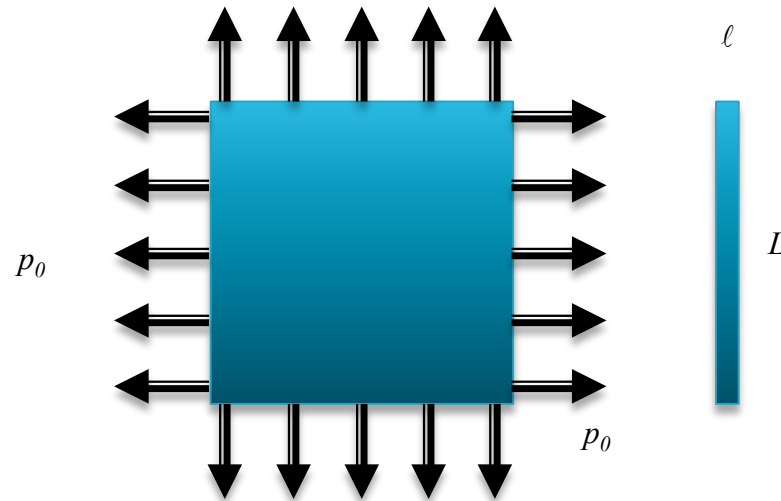
Une plaque carrée, en acier laminé à chaud, de 50 cm de côté et 2 mm d'épaisseur, subi sur son contour une charge linéique de $p_0 = 2 \times 10^5$ N/m.

$$L = 50 \text{ cm}$$

$$\ell = 2 \text{ mm}$$

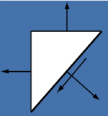
$$E = 201 \text{ GPa}$$

$$\mu = 0.27$$



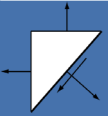
Calculer :

- 1) Les contraintes σ_x et σ_y au centre de la plaques et la contrainte de cisaillement sur le plan à 45°
- 2) Les allongements relatif ε et absolu ΔL des côtés
- 3) La variation relative de volume
- 4) La densité d'énergie



Chapitre 3 : État de contrainte bidimensionnel

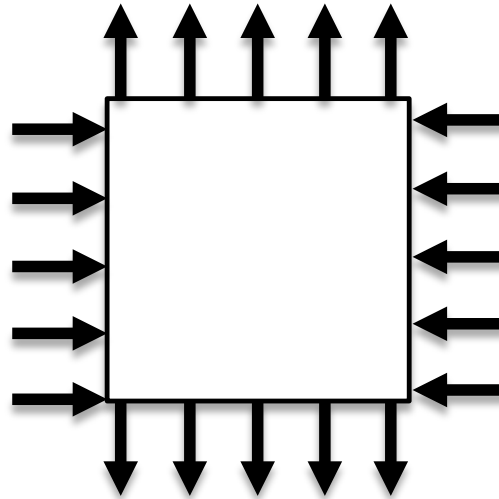
Exemple plaque carrée



Chapitre 3 : État de contrainte bidimensionnel

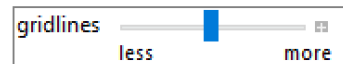
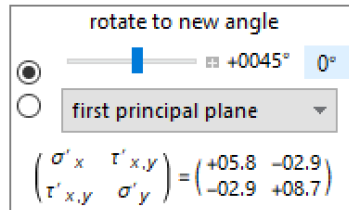
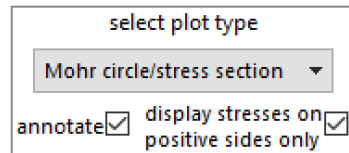
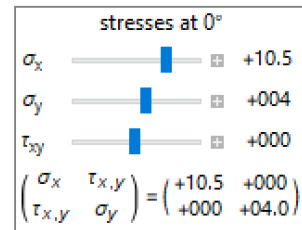
Exemple plaque carrée en traction - compression

Illustrer la réciprocity d'un état de contrainte en traction – compression (équivalentes) avec un état de contrainte en cisaillement pur (dessiner le cercle de Mohr)

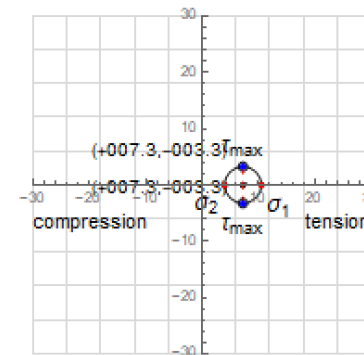
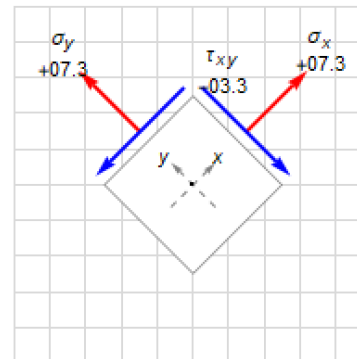


Chapitre 3 : État de contrainte bidimensionnel

Contraintes principales et cercle de Mohr pour un état de contrainte plane

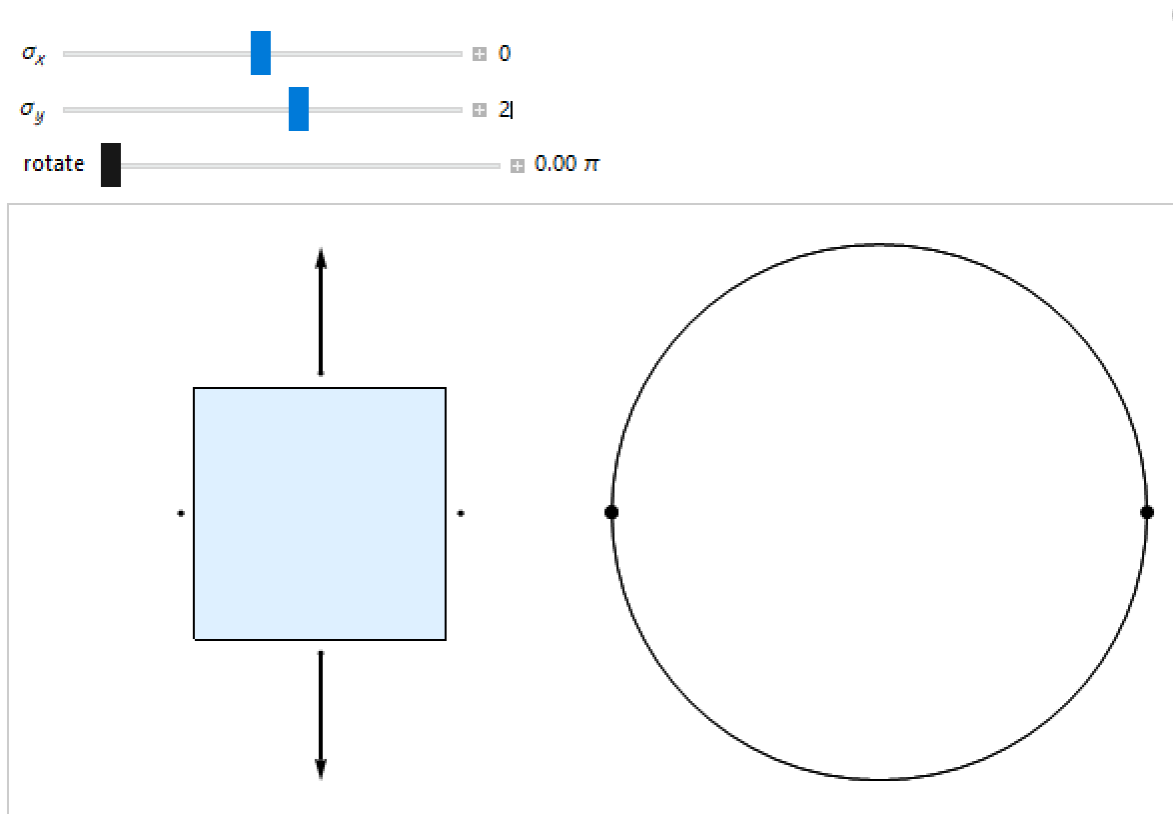


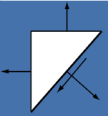
σ_x	σ_y	τ_{xy}	σ_1	σ_2	τ_{max}	θ_1	θ_2
+010.5	+004.0	+0000	+010.5	+004.0	± 003.3	+0000°	+090.0°



Chapitre 3 : État de contrainte bidimensionnel

Rotation en contrainte plane





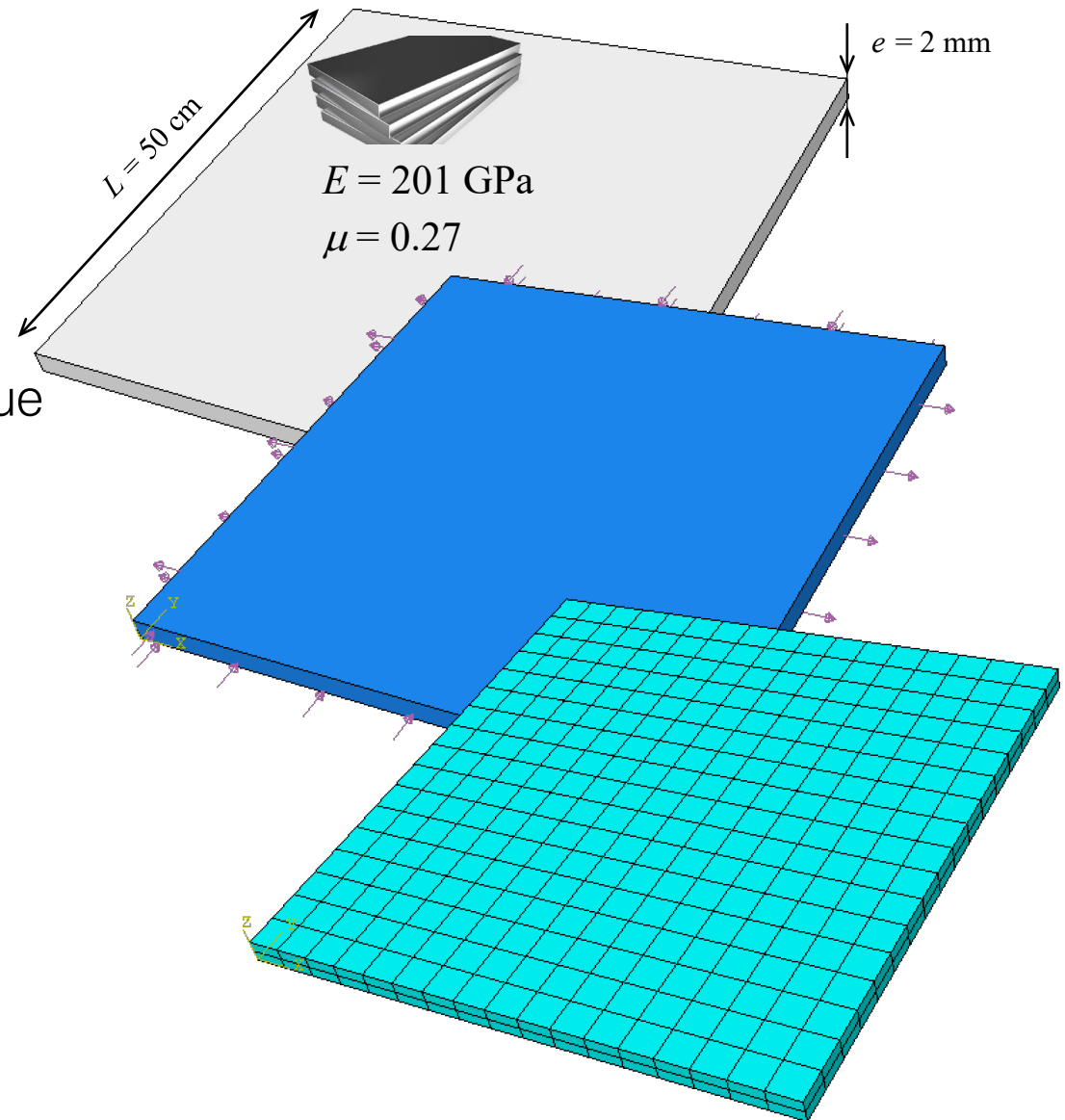
Chapitre 3 : État de contrainte bidimensionnel

Exemple plaque carrée en traction - compression

Exemple plaque carrée en **traction - compression**

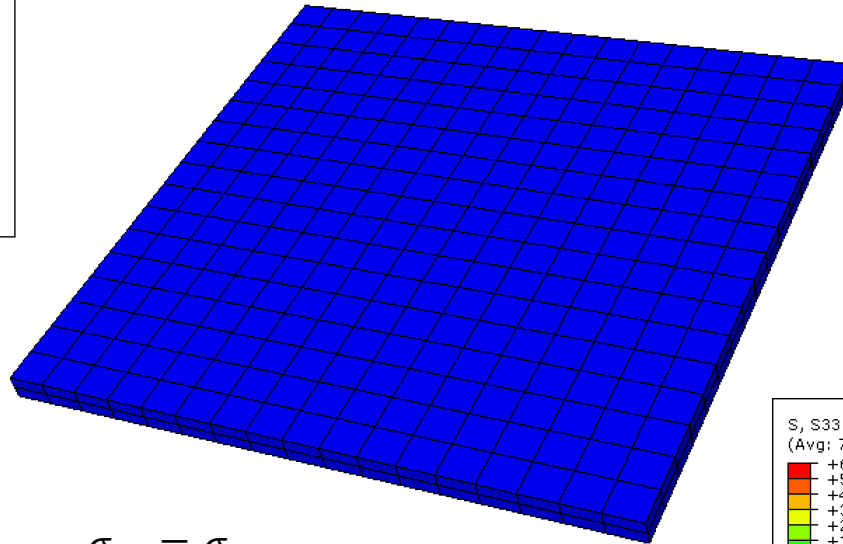
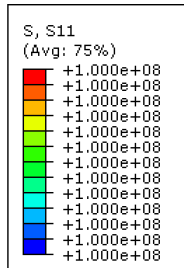
Simulation

- 1) Géométrie
- 2) Matériaux
- 3) Type analyse → linéaire, statique
- 4) Conditions aux limites
- 5) Maillage (quadratique)

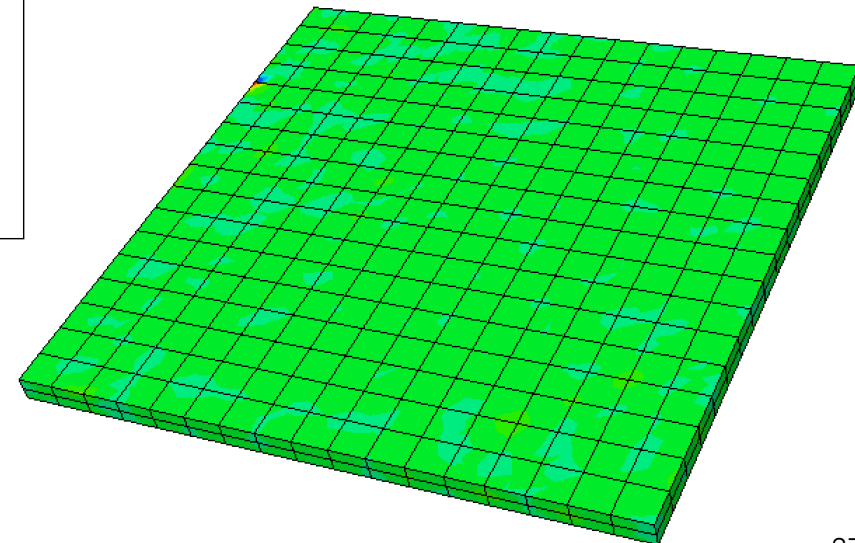
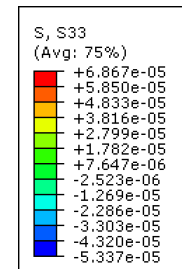


Simulation

- Contraintes principales



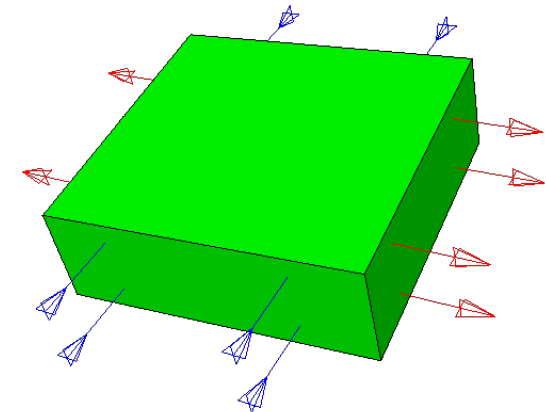
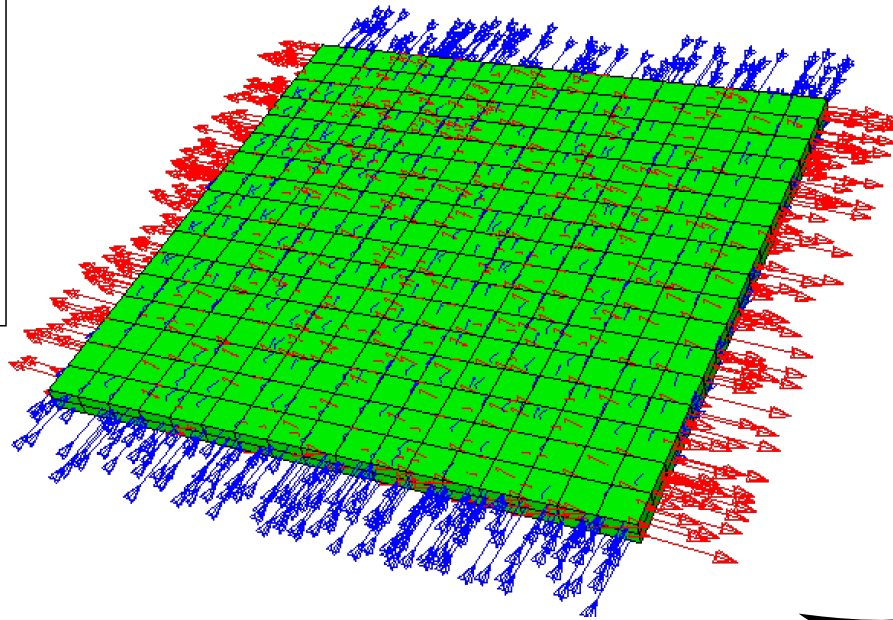
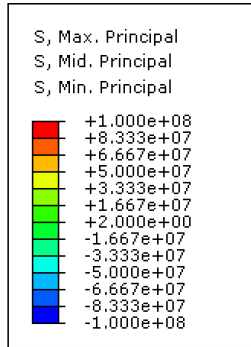
$$\sigma_{22} = \sigma_{11}$$



$$\sigma_3 = 0 \text{ et } \tau_{ij} = 0$$

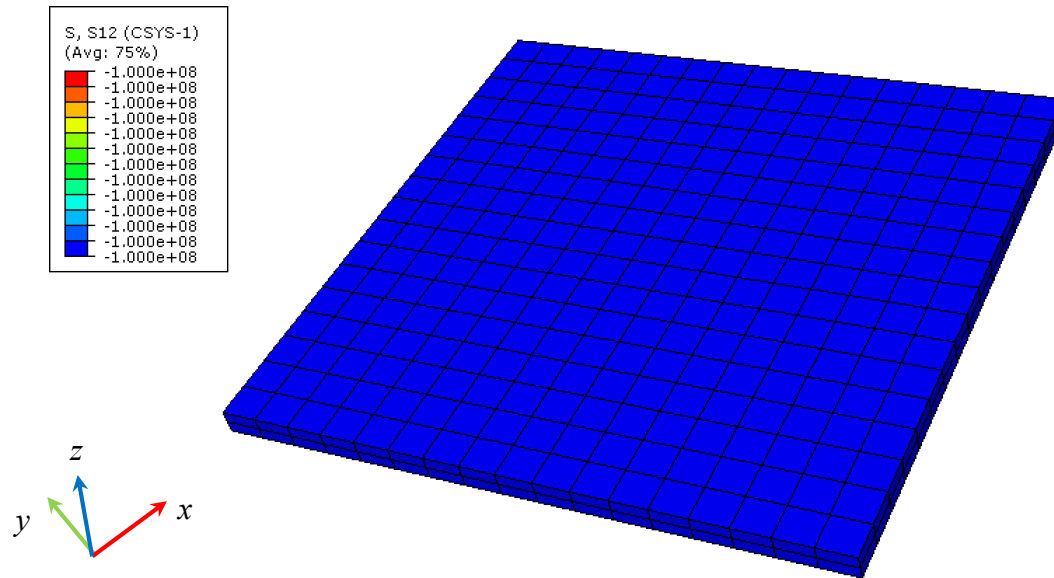
Simulation

- Directions des contraintes principales



Simulation

- Contraintes dans un système de coordonnées à 45°



- Le système de coordonnées pour la représentation des contraintes ne correspond plus aux axes dits «principaux»

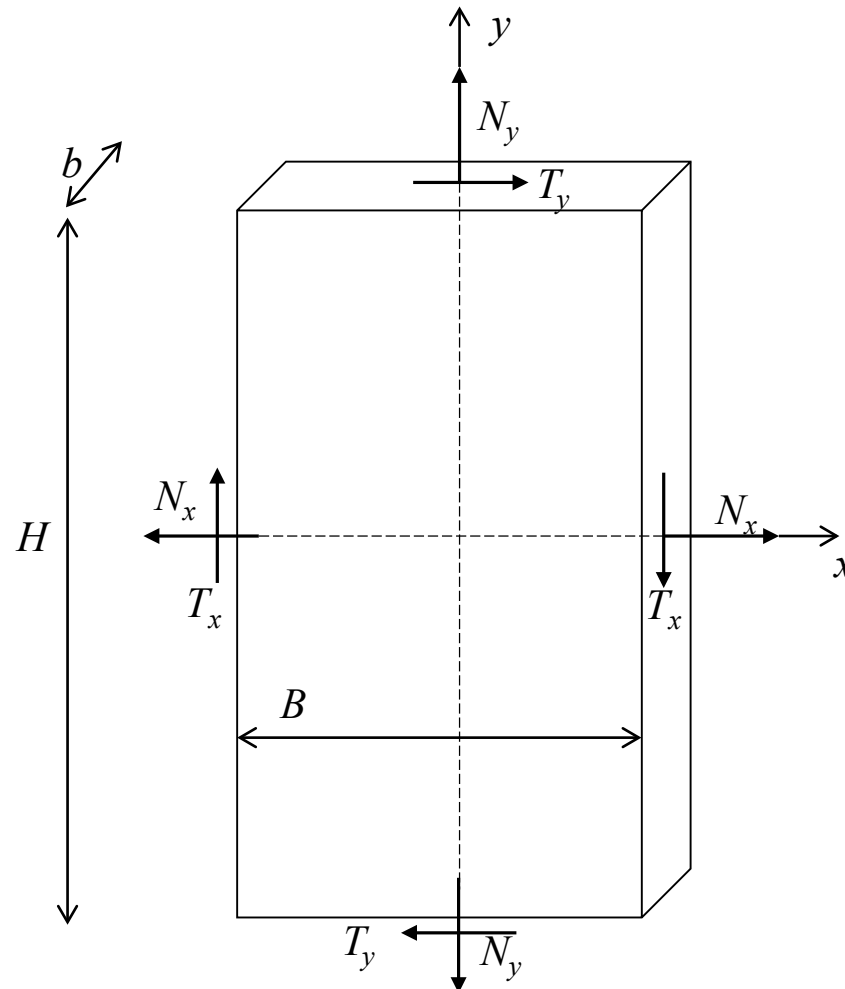
Chapitre 3 : État de contrainte bidimensionnel

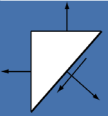
Exemple bloc soumis à des charges biaxiales

La figure montre un bloc solide soumis à un état de contraintes pour lequel on connaît les composantes normales et tangentiels. Déterminer, par le calcul et sur le cercle de Mohr, les valeurs des contraintes principales.

- $N_x = 2 \times 10^5 \text{ N}$
- $N_y = -3.6 \times 10^4 \text{ N}$
- $T_x = 9 \times 10^4 \text{ N}$

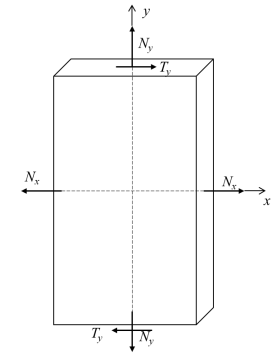
- $B = 6 \text{ cm}$
- $b = 1 \text{ cm}$
- $H = 10 \text{ cm}$

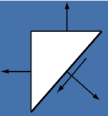




Chapitre 3 : État de contrainte bidimensionnel

Exemple bloc soumis à des charges biaxiales





Chapitre 3 : État de contrainte bidimensionnel

Exemple bloc soumis à des charges biaxiales

